Aula 4

Definição:Dado um número complexo $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ definem-se

- **Módulo** ou **Valor Absoluto** de z, e designa-se por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Argumento** de z $(\neq 0)$, ao ângulo (classe de equivalência) formado por z e pelo eixo real

$$\mathrm{Arg}(z) = \theta_z = \mathrm{arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \; (\pm\pi \text{ no } 2^{\text{o}} \text{ e } 3^{\text{o}} \text{ quad}).$$

Chama-se **ramo do argumento** a qualquer escolha única do ângulo numa faixa $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$.
Chama-se **ramo principal do argumento** à escolha única no intervalo $]-\pi, \pi]$.

Chama-se **representação trigonométrica** ou em **coordenadas polares** dum complexo à forma

$$z = |z| \cos\theta_z + i|z| \,\mathrm{sen}\,\theta_z = |z|(\cos\theta_z + i\,\mathrm{sen}\,\theta_z).$$

Proposição (Fórmula de De Moivre):Dados complexos

$$z = |z|(\cos\theta_z + i\,\mathrm{sen}\,\theta_z) \qquad \text{e} \qquad w = |w|(\cos\theta_w + i\,\mathrm{sen}\,\theta_w),$$

então o produto é dado por

$$zw = |z||w|(\cos(\theta_z + \theta_w) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_z + \theta_w)),$$

ou seja,

$$|zw| = |z||w| \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w).$$

Analogamente, para o quociente ($w \neq 0$)

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w).$$

Da mesma forma

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta_z) + i\,\mathrm{sen}\,(n\theta_z)).$$

Proposição: Dados complexos $z, w \in \mathbb{C}$,

- $|z| \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|zw| = |z||w|$
- $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ para $w \neq 0$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (**desigualdade triangular**).
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$.
- $|\text{Re}(z)| \leq |z|$, $|\text{Im}(z)| \leq |z|$.
- $|z| \leq |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$.

Definição: Dado um número complexo $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ designa-se por **conjugado** de z, e representa-se por $\bar{z}$, o número

$$\bar{z} = x - iy.$$

Proposição: Dados complexos $z, w \in \mathbb{C}$,

- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$.
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ para $w \neq 0$.
- $\bar{\bar{z}} = z$.
- $z\bar{z} = |z|^2$.
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ para $z \neq 0$.
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\qquad$ $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.
- z é real $\Leftrightarrow z = \bar{z}$.
- z é imaginário puro $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

Raízes

$$z = \sqrt[n]{w}, \qquad w \neq 0$$

Proposição:Dado $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, então existem n raízes $\sqrt[n]{w}$ distintas, todas com o mesmo valor absoluto e argumentos que distam $2\pi/n$ uns dos outros, dadas em coordenadas polares por

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \left(\frac{\theta_w}{n} + \frac{2\pi}{n} k \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_w}{n} + \frac{2\pi}{n} k \right) \right)$$

,

$$k = 0, 1, \ldots n - 1.$$

$\mathbb{C}$ como um espaço métrico

Definição:Um **espaço métrico** é um par (X, d) em que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função, denominada de **métrica** ou **distância**, que satisfaz as seguintes propriedades para todos $x, y, z \in X$

- $d(x, y) \geq 0$.
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Proposição:O conjunto $\mathbb{C}$, com a distância entre dois complexos $z, w \in \mathbb{C}$ dada por

$$d(z, w) = |z - w|,$$

é um espaço métrico.